

线性代数 A2 期中考试

2025 年 11 月 12 日 9:45—11:45, 5403 教室

姓名_____ 学号_____ 得分_____

说明：禁止使用课本习题或其他参考书中的结论。涉及到的线性运算都是通常的运算。

一、填空题。每空 5 分，共 25 分。结果需化简，写在空格处。

1. 设实线性空间 V 中向量 e_1, e_2, e_3 线性无关，则向量组 $e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_2 + e_3, e_2 - e_3$ 共有 _____ 个极大线性无关组。
2. 已知线性空间 V 的子空间 V_1, V_2 满足 $\dim V_1 = \dim V_2 = 3, \dim(V_1 \cap V_2) = 2$ ，则 $\dim(V_1 + V_2) =$ _____。
3. 设实线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的子空间 $V_1 = \text{Span}\{(x+1)^2, (x+2)^2\}$, $V_2 = \text{Span}\{(x+3)^2, (x+4)^2\}$ 。写出 $V_1 \cap V_2$ 的一个基 _____。
4. 在实线性空间 $V = \mathbb{R}^2$ 中，设 $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (0, 1), \alpha_1^*, \alpha_2^* \in V^*$ 是 α_1, α_2 的对偶基， $\beta_1 = (1, 1), \beta_2 = (2, 1), \beta_1^*, \beta_2^* \in V^*$ 是 β_1, β_2 的对偶基，则从 α_1^*, α_2^* 到 β_1^*, β_2^* 的过渡矩阵 $= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ 。
5. 设实线性空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(X) = AX + XA$ ，其中 $A = J_n(0)$ 是 Jordan 块，则 $\text{rank } \mathcal{A} =$ _____。

二、简答题。每题 6 分，共 30 分。判断下列叙述是否正确，并简要说明理由。

1. 2 阶 Hermite 方阵的全体在矩阵的加法、数乘运算下构成复数域上的线性空间。
2. 给定 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ，设 U 是 A 的行向量生成的实线性空间， V 是 A 的列向量生成的实线性空间，则 U 与 V 同构。
3. 设 V_1, V_2, V_3 是有限维线性空间 V 的子空间，则 $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$ 是 $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$ 的充分必要条件。
4. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 是单射当且仅当 $\mathcal{A}$ 是满射。
5. 设 $\mathcal{A}$ 是任意线性空间 V 上的线性变换，则 $\text{Ker } \mathcal{A}$ 与 $V/\text{Im } \mathcal{A}$ 同构。

三、解答题. 每题 15 分, 共 45 分. 需给出详细解答和证明过程.

1. 设实线性空间 $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 2\}$, $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(1) 任取 $A \in V$. 求证: $\rho_A: f \mapsto f(A)$ 是 $U \rightarrow V$ 的线性映射.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 求 ρ_A 在基 $\{1, x, x^2\}$ 和 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵表示.

(3) 求所有 $A \in V$, 使得 ρ_A 是单射.

2. 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x + z)$.

(1) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的多面体 $\Sigma: |x| + |y| + |z| \leq 1$. 求 $\mathcal{A}(\Sigma)$ 的体积.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的圆盘 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. 求 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 的面积.

3. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是有限维线性空间 V 上的线性变换. 求证: 下列两个叙述等价.

① $V = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Im } \mathcal{B}$. ② $\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \text{rank } \mathcal{B}$.

参考答案与评分标准

一、 $16, 4, 2x^2 + 10x + 11, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, n^2 - n.$

二、 每小题判断 1 分, 理由 5 分.

1. 错误. 关于数乘不封闭.
2. 正确. $\dim U = \dim V = \operatorname{rank} A.$
3. 错误. 例如, $V = \mathbb{R}^2$, $V_1 = \operatorname{Span}(e_1)$, $V_2 = \operatorname{Span}(e_2)$, $V_3 = \operatorname{Span}(e_1 + e_2)$,
 $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = 2 \neq 3 = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3.$
4. 正确. 设 A 是 $\mathcal{A}$ 在某个基下的矩阵表示, 则 $\mathcal{A}$ 是单射/满射当且仅当 A 是列满秩/行满秩当且仅当 A 是可逆方阵.
5. 错误. 例如, $\mathcal{A}$ 是 $V = \mathbb{R}[x]$ 上的微分映射, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Span}(1)$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V.$

三、

1. (1) 验证 ρ_A 保加法、保数乘. (2) I, A, A^2 的坐标排成矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
(3) 由 $\varphi_A \in \operatorname{Ker} \rho_A$ 得 ρ_A 不是单射. (每小问 5 分)

2. (1) $\mathcal{A}$ 的矩阵表示 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2$, Σ 的体积 $V = \frac{4}{3}$, $\mathcal{A}(\Sigma)$ 的
体积 $= \det(A)V = \frac{8}{3}.$ (5 分)

- (2) Γ 的法向 $v = (1, 1, 1)$, 半径 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$, 面积 $S = \frac{2\pi}{3}$. $\mathcal{A}(\Gamma)$ 的法向 $w = vA^{-1} = \frac{1}{2}(-1, 1, 3)$, 面积 $= \frac{\|w\|}{\|v\|} \det(A)S = \frac{2\sqrt{33}\pi}{9}.$ (10 分)

3. (1) $V = \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \operatorname{Im} \mathcal{B} \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{AB} \Rightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{AB}).$ (5 分)
(2) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{AB}) \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{AB} \Rightarrow \forall \alpha \in V, \exists \beta \in V$ 使 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{AB}\beta \Rightarrow \alpha - \mathcal{B}\beta \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow V = \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \operatorname{Im} \mathcal{B}.$ (5 分)
(3) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \mathcal{B} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{B}}$ 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{AB}) = \operatorname{rank}(\mathcal{B}).$ (5 分)